به نام خداوند بخشنده مهربان

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رمضانی

پاییز ۱۴۰۲

مقدار و بردار ویژه، مشتق ماتریس، کمترین مربعات و فضای نرم | **تمرین چهارم** | تاریخ انتشار: ۲۶ آذر ۱۴۰۲

---

۱. پرسش‌های خود درمورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. **سیاست ارسال با تاخیر:** شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. **همچنین هر تمرین تئوری و عملی را می‌توانید تا حداکثر ۳ روز با تاخیر تحویل دهید.** این مقدار برای تمارین تئوری و عملی به‌صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. **سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمارین:** دانشجویان می‌توانند در حل تمارین برای رفع ابهام و یا به‌دست آوردن ایده‌ی کلی با یک‌دیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به‌دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماما توسط خود دانشجو انجام شود. **حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.**

سوالات تئوری (۱۵ + ۷۵ نمره)

تاریخ تحویل: ۸ دی ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۸ نمره) p-norm در فضای R^n را به صورت $\|x\|_p = \left(\sum_{k=۱}^{n} |x_k|^p\right)^{۱/p}$ تعریف می‌کنیم. برای $q > p > ۰$ می‌توان نشان داد $\|x\|_p \geq \|x\|_q$.

(آ) (۳ نمره) نشان دهید برای یک مقدار ثابت n داریم:

$$\|x\|_۱ \leq \sqrt{n}\|x\|_۲$$

(ب) (۵ نمره) آیا می‌توان برای ثوابت p و q که $q > p > ۰$ است نشان داد رابطه زیر برقرار است؟ توضیح دهید.

$$\|x\|_p \leq C\|x\|_q$$

پرسش ۲ (۱۵ نمره) حداقل نرم اقلیدسی

یکی از پاسخ‌های کلاسیک برای دستگاه معادلات $Ax = b$ بشرطیکه ماتریس $A \in R^{n\times m}$ و $m > n$ و این ماتریس، فول‌رنک سطری است به شکل زیر است:

$$x_{min-norm} = A^T(AA^T)^{-۱}b$$

با توجه به این موضوع، به سوالات زیر پاسخ دهید:

(آ) (۵ نمره) توضیح دهید که چرا فول‌رنک سطری بودن این ماتریس لازم است؟ ادعای خود را ثابت کنید.

(ب) (۱۰ نمره) اثبات کنید که $x_{min-norm}$ در بین تمامی جواب‌های $Ax = b$ دارای کمترین نرم اقلیدسی است.

پرسش ۳ (۱۲ نمره)

برای هر یک از ماتریس‌های زیر، مقادیر ویژه آن را محاسبه کنید و برای هر یک، مجموعه حداکثری از بردار ویژه‌های مستقل خطی مرتبط با آن را بیابید. در نهایت بگویید ماتریس قطری‌پدیر هست یا نه. در حالت قطری‌پذیری، یک ماتریس P بیابید که در رابطه $P^{-۱}AP = D$ صدق کند.

(آ) (۴ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

(ب) (۴ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

(ج) (۴ نمره)

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

پرسش ۴ (۱۰ نمره) فرض کنید V یک فضای خطی روی $\mathbf{R}$ است و T تابعی خطی روی V.

(آ) (۳ نمره) فرض کنید $u, v \in V$ و u و v و $u + v$ بردارویژه‌های T هستند. نشان دهید مقدارویژه‌های متناظر u و v برابرند.

(ب) (۴ نمره) فرض کنید $Rank(T) = r$. نشان دهید T حداکثر $r + ۱$ مقدارویژه متمایز دارد.

(ج) (۳ نمره) فرض کنید هر عضو ناصفر V بردارویژه T است. نشان دهید T مضرب اسکالر همانی است.

پرسش ۵ (۲۰ نمره) قصد داریم گرادیان تابع L را محاسبه کنیم برای این منظور ابتدا مقادیر خواسته شده را محاسبه نمایید و سپس با استفاده از آن ها گرادیان را محاسبه کنید.(ورودی تابع بردار x با ابعاد $۱ \times D_x$ است و $y \in \{۰, ۱\}^k$ همچنین $W_۱$ ماتریس ضرایب با ابعاد $D_x \times n$ است.)

$$z_۱ = W_۱ x + b_۱$$

$$a_۱ = \text{LeakyReLU}(z_۱, \alpha = ۰/۰۱)$$

$$z_۲ = W_۲ a_۱ + b_۲$$

$$\hat{y} = \text{Softmax}(z_۲)$$

$$L = -\sum_{i=۱}^{K} y_i \ln(\hat{y}_i)$$

تعریف توابع Softmax و LeakyReLU :

$$\text{Softmax}(z_۱) = \frac{\exp z_۱^i}{Z} \text{ where } Z = \sum_{j=۱}^{K} \exp z_۱^j$$

$$\text{LeakyReLU}(x, \alpha) = \begin{cases} \alpha x & x \leq ۰ \\ x & x \geq ۰ \end{cases}$$

مقادیر زیر را محاسبه نمایید:

(آ) (۵ نمره)

$$\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial z_۲^k}$$

(ب) (۵ نمره)

$$\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial z_۲^{i \neq k}}$$

(ج) (۵ نمره)

$$\frac{\partial L}{\partial W_۱}$$

(د) (۵ نمره)

$$\frac{\partial L}{\partial b_۱}$$

پرسش ۶ (۱۵ نمره) همانطور که می‌دانید در مسئله کمترین مربعات، به دنبال کمینه کردن جمله زیر هستیم:

$$||Ax - b||^۲ = \sum_{i=۱}^{m} (a_i^T x - b_i)^۲$$

که در آن a_i^T ها، سطرهای ماتریس A هستند. حالا در مسئله کمترین مربعات وزن‌دار ما به دنباله کمینه کردن جمله زیر هستیم:

$$\sum_{i=۱}^{m} w_i (a_i^T x - b_i)^۲$$

که w_i ها وزن‌های مثبتی هستند. این وزن‌ها به ما این قابلیت را می‌دهند که به بردارهای اختلاف $a_i^T x - b_i$ وزن‌های متفاوتی اختصاص دهیم. با این توضیحات به سوالات زیر پاسخ دهید.

(آ) (۶ نمره) نشان دهید که عبارت $\sum_{i=۱}^{m} w_i (a_i^T x - b_i)^۲$ را می‌توان به صورت $||D(Ax - b)||^۲$ ساده کرد که در آن D یک ماتریس قطری است. اینکار باعث می‌شود که بتوانیم مسئله کمترین مربعات وزن‌دار را به شکل مسئله کمترین مربعات استاندارد درآوریم و با کمینه کردن $||Bx - d||^۲$، که در آن $B = DA$ و $d = Db$ می‌باشند، مسئله را حل کنیم.

(ب) (۴ نمره) نشان دهید اگر ستون‌های ماتریس A مستقل خطی باشند، ستون‌های ماتریس B نیز مستقل خطی هستند.

(ج) (۵ نمره) می‌دانیم جواب مسئله کمترین مربعات به صورت $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ می‌باشد (با فرض اینکه A ستون‌های مستقل خطی دارد). یک رابطه مشابه برای جواب مسئله کمترین مربعات وزن‌دار بدست آورید. می‌توانید در صورت نیاز در رابطه نهایی از ماتریس $W = diag(w)$ استفاده کنید.

پرسش ۷ (۱۰ نمره) یک حالت تعمیم یافته از مسئله کمترین مربعات به صورت زیر است که یک تابع Affine به جمله خطا اضافه می‌شود.

$$minimize \ \ ||Ax - b||^{2} + c^T x + d$$

در معادله بالا x یک بردار n بعدی است که ما به دنبال آن هستیم. A یک ماتریس $m \times n$، b یک بردار m بعدی، c یک بردار n بعدی و d یک عدد می‌باشند. فرضیات ما در این مسئله مشابه مسئله کمترین مربعات است و فرض می‌کنیم که ستون‌های ماتریس A مستقل خطی هستند. ابتدا این مسئله را به فرم مسئله کمترین مربعات درآورید و سپس جواب آن، $\hat{x}$ را برحسب داده‌های مسئله بدست آورید.

سوالات عملی (۲۵ نمره)

تاریخ تحویل: ۸ دی ۱۴۰۲

پرسش ۱ (۲۵ نمره) برای سوالات عملی، به کوئرای درس مراجعه کنید.